

# قیمت‌گذاری دسته‌یی و مدیریت موجودی انبار با در نظر گرفتن رفتار مشتری

نوشین حمیدیان (کارشناس ارشد)

حسن شوندی\* (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی صنایع و مدیریت شریف، تابستان ۱۳۹۶  
دوره ۱، شماره ۱/۲، ص. ۳۵-۴۲

در این مقاله مسئله‌ی روزنامه‌فروش دومحصولی با محدودیت انبار بررسی می‌شود. قیمت و مقدار سفارش کالا متغیر تصمیم هستند. تقاضا دارای ماهیت احتمالی است و فرض کشش متقابل تقاضا نیز در نظر گرفته می‌شود؛ بدین معنا که علاوه بر قیمت خود کالا، قیمت سایر کالاها نیز در میزان تقاضای هر کالا تأثیرگذار است. همچنین فرض شده است که فروشندگان از استراتژی فروش دسته‌یی ترکیبی استفاده می‌کنند، علاوه بر فروش جداگانه‌ی کالاها، کالاها در دسته‌یی شامل هر دو کالا با قیمتی کمتر از مجموع قیمت‌های فروش دو کالا نیز به فروش می‌رسد. برای حل مسئله الگوریتمی دومرحله‌یی ارائه می‌شود. این الگوریتم بر مبنای الگوریتم افراز آشیانه‌یی و جست‌وجوی چندجهتی توسعه داده شده است و مزایای هر دو روش جست‌وجوی سراسری و جست‌وجوی محلی را به‌طور هم‌زمان دارد.

واژگان کلیدی: قیمت‌گذاری دسته‌یی، مسئله‌ی روزنامه‌فروش، چندمحصولی، الگوریتم افراز آشیانه‌یی، جست‌وجوی چندجهتی.

## ۱. مقدمه

در این مقاله مسئله‌ی روزنامه‌فروش چندمحصولی در نظر گرفته می‌شود. امکان گروه‌بندی محصولات در دسته‌های متفاوت وجود دارد و شرکت در پی تصمیم قیمت فروش هر محصول و قیمت فروش دسته‌های تعریف شده به‌همراه تعیین مقدار سفارش برای هر محصول در ابتدای دوره است. علی‌رغم ادبیات بسیار غنی در مسئله‌ی روزنامه‌فروش، اما در مسائلی که قیمت‌گذاری نیز در مسئله لحاظ شده است محدود به یک محصول است. براساس یافته‌های این پژوهش مسئله‌ی روزنامه‌فروش چندمحصولی با فرض قیمت‌گذاری و امکان دسته‌بندی محصولات تاکنون بررسی نشده است.

این مقاله به دنبال توسعه‌ی مسئله‌ی روزنامه‌فروش با در نظر گرفتن موارد ذیل است: فروش چند کالا با تقاضای احتمالی، وابستگی تقاضای کالاها به قیمت خود کالا و سایر کالاها، در نظر گرفتن استراتژی فروش دسته‌بندی کالاها و تعیین هم‌زمان قیمت و میزان سفارش.

به دلیل پیچیدگی مسئله‌ی مورد بررسی در این مقاله، حل بهینه‌ی آن امکان‌پذیر نیست. از آنجا که دو دسته‌ی مجزای متغیر تصمیم‌گیری وجود دارد و الگوریتم‌های فراابتکاری موجود که از یک جواب تصادفی شروع می‌کنند، کارایی چندانی در حل مسئله‌ی مورد بررسی ندارند. بنابراین با توجه به شرایط تعریف مسئله و پیچیدگی آن، الگوریتمی برای حل مسئله توسعه داده شده که مزایای جست‌وجوی محلی و

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۳/۷/۱۵، اصلاحیه ۱۳۹۴/۷/۱۴، پذیرش ۱۳۹۴/۸/۱۲.

nooshin.hamidian@gmail.com  
shavandi@sharif.edu

سراسری را به‌صورت هم‌زمان دارد. همچنین چون در هر مرحله یک دسته از متغیرها ثابت فرض می‌شوند و مسئله برای دسته‌ی دوم متغیرها حل می‌شود، جواب‌های حاصله در مقایسه با جواب‌هایی که هر دو دسته از متغیرها به‌صورت تصادفی تعیین می‌شوند، بهتر است. الگوریتم توسعه داده شده دو مرحله دارد. در ادامه مروری خواهیم داشت بر مهم‌ترین فعالیت‌هایی که تاکنون به‌طور مجزا در بخش قیمت‌گذاری دسته‌یی و قیمت‌گذاری و کنترل موجودی هم‌زمان کالاها صورت گرفته است.

## ۲. مرورادبیات

### ۲.۱. قیمت‌گذاری دسته‌یی

اولین مطالعه در زمینه‌ی قیمت‌گذاری دسته‌یی کالاها توسط استیگر (۱۹۶۳) انجام شد.<sup>[۱]</sup> او قیمت رزرو دسته کالاها را برابر با جمع قیمت رزروهای کالاهای موجود در هر دسته فرض کرده و به این نتیجه رسیده است که دسته‌بندی کالاها زمانی سودمند خواهد بود که بین قیمت رزرو کالاها همبستگی منفی وجود داشته باشد. آدامز و یلن (۱۹۷۶) هر سه استراتژی دسته‌بندی کامل کالاها، دسته‌بندی ترکیبی و عدم دسته‌بندی را بررسی کرده‌اند و به این نتیجه رسیده‌اند که سودمندی هر کدام از این استراتژی‌ها بستگی به ساختار هزینه و تابع توزیع قیمت رزرو کالاها دارد.<sup>[۲]</sup> اشملانسی (۱۹۸۴) با فرض همبستگی مثبت کالاها و تابع توزیع نرمال قیمت رزرو، از روش استیگر استفاده کرده و نشان داده است که استراتژی دسته‌بندی ترکیبی

## ۲.۲. قیمت‌گذاری و کنترل موجودی هم‌زمان کالاها

مون و سیلور (۲۰۰۰) مسئله‌ی روزنامه‌فروش چندمحصولی یک دوره‌ی با محدودیت بودجه را بررسی، و برای حل آن از رویکرد برنامه‌ریزی پویا استفاده کرده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند که با افزایش تعداد کالاها و بودجه، استفاده از برنامه‌ریزی پویا از نظر محاسباتی بسیار پیچیده می‌شود و به همین دلیل دو رویکرد هیوربستیک برای حل مسائل بزرگ ارائه داده‌اند.<sup>[۱۵]</sup>

ملک و مونتتری (۲۰۰۵) مسئله‌ی روزنامه‌فروش چندمحصولی را با دو محدودیت بررسی کرده و رویکردی بر مبنای روش لاگرانژین برای محاسبه‌ی مقدار بهینه‌ی سفارش ارائه داده‌اند. فرض شده است که تابع توزیع کالاها مشخص است و قیمت پارامتر ورودی مسئله است.<sup>[۱۶]</sup> ژانگ، زو و هوا (۲۰۰۹) مسئله‌ی روزنامه‌فروش چندمحصولی با محدودیت بودجه را بررسی کرده‌اند که تأثیر قیمت سایر کالاها بر تقاضای کالای مورد نظر و قیمت‌گذاری بررسی نشده است. آن‌ها همان مسئله‌ی روزنامه‌فروش چندمحصولی با محدودیت بودجه را در سال ۲۰۱۰ نیز توسعه دادند.<sup>[۱۷]</sup> روش حل ارائه شده در مطالعه‌ی مذکور برای انواع توابع توزیع عمومی کاربرد دارد و چون خطی است پیچیدگی کمی دارد. ویهو (۲۰۰۷) یک مدل قیمت‌گذاری پویای چندمحصولی را بررسی کرده است. او فرض کرد که تقاضا برای هر محصول فرایند پواسون همگن است و تقاضای هر محصول تنها تابعی از قیمت خود محصول است.<sup>[۱۸]</sup>

شی و همکاران (۲۰۱۱) بهینه‌سازی هم‌زمان قیمت و مقدار سفارش را در مسئله‌ی روزنامه‌فروش چندمحصولی بررسی کرده‌اند. تقاضا به قیمت وابسته و از دو قسمت قطعی و غیر قطعی تشکیل شده است. قسمت قطعی تقاضا تابعی خطی از قیمت محصول است و قسمت غیرقطعی به صورت جمعی به قسمت اول اضافه شده است. تقاضای هر کالا تنها به قیمت همان کالا بستگی داشته و کشش متقابل تقاضا در نظر گرفته نشده است.<sup>[۲۰]</sup>

در بین تمامی مطالعات انجام شده، مقاله‌ی موری (۲۰۱۲) به این پژوهش شباهت بیشتری دارد و تنها مقاله‌ی بی‌بی است که در آن علاوه بر آن که قیمت و میزان سفارش در مدل روزنامه‌فروش یک دوره‌ی متغیر تصمیم است، فرض همبستگی کالاها و کشش متقابل تقاضا نیز در نظر گرفته شده است. بدین معنا که تقاضای هر کالا علاوه بر قیمت خود کالا به قیمت سایر کالاها هم وابسته است. البته در این مقاله هزینه‌ی کمیود موجودی و استراتژی دسته‌بندی کالاها در نظر گرفته نشده است.<sup>[۲۱]</sup> ژانگ (۲۰۱۴) بهینه‌سازی هم‌زمان قیمت و سفارش را برای دو کالای جایگزین بررسی کرده و نشان داده است که با افزایش قابلیت جایگزینی، قیمت فروش و سود فروشنده افزایش می‌یابد. در این مطالعه فقط حالت جایگزینی دو کالا بررسی شده است.<sup>[۲۲]</sup>

فو (۲۰۱۴) فو بررسی هم‌زمان قیمت‌گذاری و موجودی کالاهای فصلی با تقاضای متغیر پرداخته است. نتایج این مطالعه برای فروشندگانی که در طول دوره با تقاضای متغیر (با توجه به شرایط جوی) مواجه‌اند، بسیار مفید است.<sup>[۲۳]</sup>

لی (۲۰۱۳) به بررسی هم‌زمان قیمت‌گذاری و کنترل موجودی یک کالا در چند دوره با تابع تقاضای احتمالی پرداخته است. در این مطالعه الگوریتمی چندمرحله‌ی ارائه شده است. جواب هر متغیر در یک فاز مشخص از الگوریتم به دست می‌آید که برای حل مسائل کوچک تا متوسط بسیار مناسب است. این الگوریتم تنها برای مسئله‌ی روزنامه‌فروش با یک کالا توسعه داده شده است.<sup>[۲۴]</sup>

مده (۲۰۱۴) به بررسی هم‌زمان قیمت‌گذاری و موجودی با در نظر گرفتن ترکیب کالاها پرداخته است. در این مطالعه دو سناریو در نظر گرفته شده است:

از مزایای توان استراتژی دسته‌بندی کامل و عدم دسته‌بندی برخوردار است.<sup>[۲]</sup> لانگ (۱۹۸۴) با آزادسازی فرض نرمال بودن تابع توزیع قیمت زرو بیان می‌دارد که مناسب‌ترین حالت برای استفاده از استراتژی دسته‌بندی برای ایجاد تمایز قیمت زمانی است که قیمت زرو کالاها همبستگی منفی داشته باشند.<sup>[۴]</sup> سلینجر (۱۹۹۵) از طریق تجزیه و تحلیل گرافیکی دسته‌بندی کالاها نشان داده است چنانچه دسته‌بندی کالاها موجب کاهش هزینه نشود زمانی سودمند خواهد بود که قیمت زرو کالاها همبستگی منفی داشته باشند. همچنین در صورتی که دسته‌بندی کالاها موجب کاهش هزینه شود زمانی سودمند خواهد بود که قیمت زرو کالاها همبستگی مثبت داشته باشند.<sup>[۵]</sup>

اکونومیدس (۱۹۹۶) نشان داده است که سود کارخانه علاوه بر قیمت دسته کالاها به درجه‌ی مکمل بودن کالاها نیز بستگی دارد.<sup>[۶]</sup> ارنست و کولیس (۱۹۹۹) یک مدل روزنامه‌فروش را بررسی کرده‌اند و نشان داده‌اند که افزایش موجودی دسته‌های کالا در صورتی که کالاها همبستگی مثبت داشته باشند، مناسب است و همچنین افزایش موجودی آن‌ها منجر به سود بیشتر می‌شود.<sup>[۷]</sup>

بولوت (۲۰۰۹) مسئله‌ی خرده‌فروشی با دو کالا و یک دسته شامل هر دو کالا را در یک دوره بررسی کرده است. در این مطالعه تقاضای مشتریان دارای تابع توزیع پواسون بوده و نرخ ورود مشتریان به قیمت کالا بستگی دارد و نیز قیمت بهینه‌ی کالا که منجر به بیشینه شدن سود می‌شود به دست آمده است. همچنین نشان داده شده که استراتژی دسته‌بندی ترکیبی عملکرد بهتری نسبت به سایر استراتژی‌های دارد.<sup>[۸]</sup> یوسل، کارسمن و سلمان (۲۰۰۸) تأثیر موجودی اولیه بر دسته‌بندی کالاها و قیمت آن‌ها را بررسی کرده و نشان داده‌اند با افزایش ضریب همبستگی کالاها سود مورد انتظار کاهش می‌یابد.<sup>[۹]</sup>

یان (۲۰۱۱) چارچوبی برای تعیین استراتژی مناسب قیمت‌گذاری کالاهای مکمل ارائه داده و نشان داده است که استراتژی دسته‌بندی کالاها زمانی مناسب است که کالاها درجه‌ی همبستگی بالایی داشته باشند؛ ارزش این استراتژی با افزایش اندازه بازار و حساسیت قیمت افزایش می‌یابد.<sup>[۱۰]</sup>

فریرا (۲۰۱۱) از آنجا که با افزایش تعداد کالاها ترکیب کالاها و دسته‌های ممکن افزایش می‌یابد و قیمت‌گذاری همه‌ی دسته‌ها عملاً غیرممکن می‌شود، با استفاده از روش مارکو و DEA چارچوبی برای انتخاب دسته‌های کالا ارائه داده، و برای حل از برنامه‌ریزی پویا استفاده کرده است.<sup>[۱۱]</sup>

لی (۲۰۱۳) به بررسی استراتژی‌های دسته‌بندی می‌پردازد. در این مطالعه درجه‌ی ناممکنی مشتریان در نظر گرفته می‌شود. همچنین، نشان داده شده است که با افزایش ناممکنی گروه‌های مشتریان، به کار بردن استراتژی دسته‌ی ترکیبی کارا تر از سایر استراتژی‌هاست. همچنین به صورت کلی نشان داده شده است که استراتژی دسته‌ی ترکیبی در تطبیق با گروه‌های مختلف مشتریان انعطاف‌پذیری بیشتری دارد و کارا تر است.<sup>[۱۲]</sup>

مایر (۲۰۱۳) استراتژی دسته‌ی ترکیبی خدمات را با هدف بیشینه‌کردن سود بررسی می‌کند. در این مقاله نشان داده شده است که تنها در شرایطی که تقاضا بسیار کم است، استراتژی دسته‌ی کامل مقدم بر استراتژی دسته‌ی ترکیبی است. در این مقاله نیز همانند اکثر مقالات قیمت‌گذاری دسته‌ی موجودی کالا در نظر گرفته نشده است.<sup>[۱۳]</sup>

بارگوا (۲۰۱۳) استراتژی فروش دسته‌ی ترکیبی را برای دو کالای کاملاً مستقل به کار برد، و از طریق توسعه‌ی مدل به قیمت‌های بهینه دست یافته است. نتایج این مطالعه برای فروشندگانی که دو کالای کاملاً مستقل را می‌فروشند، بسیار سودمند است.<sup>[۱۴]</sup>

$R$ : ظرفیت انبار؛

$r_i$ : فضای که کالای  $i$  در انبار اشغال می‌کند؛

$[a_i, b_i]$ : پارامتر تابع توزیع یکنواخت بخش تصادفی تقاضا؛

$h_i$ : هزینه نگهداری به‌ازای هر واحد کالایی که مازاد بر تقاضا سفارش داده شده است؛

$\pi_i$ : هزینه کمیبود موجودی به‌ازای هر واحد کمیبود کالای  $i$ ؛

$P_i$ : مجموعه قیمت مجاز کالای  $i$ ؛

$\beta_{ij}$ : پارامتر نشان‌دهنده تأثیر قیمت کالای  $j$  بر تقاضای کالای  $i$  (درجه همبستگی کالای  $i$  و  $j$ )؛

$D_i$ : حداکثر ممکن تقاضای کالای  $i$ ؛

$d_i$ : بخش قطعی تقاضا؛

$\varepsilon_i$ : بخش تصادفی تابع تقاضا؛

$F_i$ : تابع توزیع تجمعی قسمت احتمالی تقاضای کالای  $i$ ؛

### ۳.۳. متغیرهای تصمیم مسئله

$p_i$ : قیمت کالای  $i$ ؛

$q_i$ : موجودی کالای  $i$ .

### ۴.۳. مدل

مدل مسئله مورد بررسی در این مقاله براساس مدل موری (۱۲، ۲۰) و با در نظر گرفتن قیمت‌گذاری دسته‌بی و هزینه کمیبود توسعه یافته است.

$$\text{Max} \sum_{i=1}^r (p_i - C_i)q_i - (p_i + h_i) \sum_{d=0}^{q_i} F_i(p, d) - \pi_i \sum_{d=q_i}^{\text{Max} D_i} (1 - F_i(p, d)) \quad (1)$$

St :

$$p_r \leq p_r + p_1 \quad (2)$$

$$p_r \geq \max(p_1, p_r) \quad (3)$$

$$\sum_i r_i q_i \leq R \quad (4)$$

$$p_i \in P_i \quad (5)$$

$$l_i \leq q_i \leq u_i \quad (6)$$

تابع هدف از سه قسمت تشکیل شده است: ۱. سود ناشی از کالاهای سفارش داده شده؛ سود حاصل از فروش هر واحد کالای  $i$  کم‌تر از کسر هزینه تأمین کالا از قیمت فروش به دست می‌آید. ۲. هزینه نگهداری هر واحد کالای  $i$  به فروش نرفته و هزینه سرمایه؛ در این قسمت احتمال آن که تقاضا کم‌تر از میزان سفارش داده شده شود، محاسبه و در میزان جریمه حاصل ضرب می‌شود. ۳. هزینه کمیبود موجودی؛ در این مورد نیز احتمال آن که تقاضا بیش از میزان سفارش باشد محاسبه، و در جریمه آن ضرب می‌شود.

رابطه ۲ نشان می‌دهد که اصلی‌ترین محدودیت استراتژی دسته‌بندی ترکیبی کالاهاست. قیمت دسته کالاهای شامل کالای ۱ و ۲ باید از جمع قیمت کالاهای ۱ و ۲ کم‌تر باشد تا دسته‌بندی کالاهای منطقی به نظر برسد و برای مشتریان خرید

۱. فروشنده نمی‌تواند در زمینه قیمت تصمیم‌گیری کند و «قیمت» متغیر مسئله است؛ در این سناریو مقدار بهینه سفارش و بهترین ترکیب محصولات بررسی شده است. ۲. تعداد ترکیب محصولات مشخص است، و قیمت و مقدار بهینه هرکدام از محصولات بررسی شده است. در این مطالعه تنها دسته‌بی از کالاهای مناسب جهت فروش ارائه می‌شود و استراتژی‌های قیمت‌گذاری دسته‌بی در نظر گرفته نمی‌شود. [۲۵]

### ۳. تعریف مسئله

در این مقاله خرده‌فروشی را در نظر خواهیم گرفت که انبارش ظرفیت محدودی دارد و لذا در نظر دارد از سیاست دسته‌بندی کالاهای برای فروش استفاده کند. تقاضای محصولات احتمالی است و تقاضای هر کالا علاوه بر قیمت خود آن کالا تحت تأثیر قیمت سایر کالاهای نیز هست. در واقع «تقاضا» اساساً تابعی از قیمت کلیه محصولات است و تقاضای محصولات به هم وابسته‌اند. هزینه کمیبود در آخر دوره در صورت اتمام موجودی قبل از پایان دوره وجود تقاضا و هزینه نگهداری در صورت وجود موجودی در پایان دوره در نظر گرفته می‌شود. می‌توان هزینه کمیبود را همان هزینه فرصت از دست رفته تلقی کرد. تقاضای محصولات دارای عدم قطعیت جمعی است. تابع تقاضا دارای دو قسمت قطعی و احتمالی است که قسمت قطعی تابعی خطی از قیمت کلیه محصولات، و قسمت احتمالی دارای تابع توزیع یکنواخت است. هدف، تعیین میزان سفارش‌دهی و قیمت کالاهای به صورت جداگانه و دسته‌بندی کالاهای به‌گونه‌ی است که سود حاصل از فروش محصولات بیشینه شود.

### ۱.۳. فرضیات مسئله

فرض می‌شود دو محصول قابل فروش وجود دارد که فروش آن‌ها به دو صورت جداگانه و دسته‌بی شامل هر دو کالا امکان‌پذیر است. میزان موجودی هر کدام از کالاهای دسته‌بی آن‌ها و قیمت‌شان متغیر تصمیم است. تقاضای احتمالی است و همبستگی کالاهای در تابع تقاضا لحاظ شده است و تقاضای آن علاوه بر قیمت خود کالا به قیمت سایر کالاهای نیز بستگی دارد. تابع تقاضا از دو قسمت قطعی و احتمالی تشکیل شده، تابع توزیع قیمت احتمالی، مشخص است. در واقع تابع تقاضای احتمالی جمعی است:

$$D_i = d_i + \varepsilon_i$$

$$d_i = \alpha_i + \sum_j \beta_{ij} p_j$$

فروش محصولات به صورت دسته‌بی هزینه اضافی در برنداشته و در شرایط ذخیره‌سازی آن تأثیرگذار نیست. بیشترین و کم‌ترین مقدار سفارش به‌ازای هر کالا مشخص است و تنها می‌توان در این بازه سفارش داد. مجموعه‌بی از قیمت‌های مجاز هر کالا در ابتدای مسئله مشخص می‌شود.

### ۲.۳. پارامترهای مسئله

$n$ : تعداد محصولات؛

$c_i$ : قیمت تأمین یک واحد کالای  $i$ ؛

$\alpha_i$ : اندازه بازار کالای  $i$ ؛

$L_i$ : حداقل میزان سفارش کالای  $i$ ؛

$U_i$ : حداکثر میزان سفارش کالای  $i$ ؛

و به این ترتیب تنها متغیر تصمیم باقی مانده، متغیر قیمت است. بهترین مقادیر برای متغیرهای قیمت با توجه به مقادیر سفارش  $q$  وارد شده توسط الگوریتم ژنتیک محاسبه می‌شود:  $p = [p_1^*(q), p_2^*(q), p_3^*(q)]$  و مقدار تابع هدف به‌عنوان شاخص محتمل بودن در مسئله تعریف شده لحاظ می‌شود. مقدار تابع هدف بهترین قیمت‌های تعیین شده،  $\pi(p^*, q)$  و افراز‌دارای بهترین نمونه به‌عنوان محتمل‌ترین ناحیه بعدی انتخاب می‌شود.

در صورتی که بهترین نمونه پیدا شده مربوط به یک زیرناحیه از محتمل‌ترین افراز موجود باشد، همین ناحیه به‌عنوان محتمل‌ترین ناحیه‌ی مرحله‌ی بعد انتخاب می‌شود، در غیر این صورت الگوریتم به مرحله‌ی قبل بازمی‌گردد. بنابراین لازم است ویژگی‌های مربوط به هر افراز در تکرارهای مختلف ذخیره شود. بهترین نقطه‌ی به دست آمده در هر افراز نیز ذخیره می‌شود. بنابراین بهترین نقطه‌ی کلی به دست آمده در تکرار  $k$ ام الگوریتم به صورت  $x_k^{opt}$  خواهد بود. همچنین این نقطه با بهترین نتیجه‌ی کلی الگوریتم تا تکرار فعلی ( $x^{opt}$ ) مقایسه می‌شود؛ چنانچه نتیجه‌ی به دست آمده در این تکرار بهتر باشد جایگزین بهترین نتیجه‌ی کلی خواهد شد ( $x^{opt} \leftarrow x_k^{opt}$ ). چنانچه  $x_k^{opt}$  از  $x^{opt}$  بهتر نباشد، افراز‌بندی مجدد صورت نخواهد گرفت و الگوریتم به گام بعدی نخواهد رفت. فرایند نمونه‌گیری تا تعداد مشخصی تکرار می‌شود و با دست‌یابی به نمونه‌ی بهتر از  $x^{opt}$  افراز‌بندی مجدد بر این اساس انجام می‌شود در غیر این صورت باز هم نمونه‌گیری ادامه می‌یابد. در صورتی که بعد از تعداد مشخصی تکرار نمونه‌ی بهتری یافت نشد، افراز‌بندی متوقف شده و  $x^{opt}$  به‌عنوان بهترین نمونه و افراز آن به‌عنوان بهترین افراز پیدا شده معرفی می‌شود؛ بدین ترتیب حل در مرحله‌ی دوم ادامه پیدا می‌کند. یک مقدار حد آستانه برای حداکثر تعداد تکرارهای غیر بهبود یافته الگوریتم مشخص می‌شود. این مقدار با  $I^{max}$  نشان داده می‌شود که با توجه به پیچیدگی الگوریتم توسط کاربر قابل تنظیم است. در بیشتر کاربردهای الگوریتم این مقدار برابر  $3^5$  فرض می‌شود. در هر تکرار علاوه بر  $x^{opt}$  که به روزرسانی می‌شود،  $x^{opt(1)}$  که دومین جواب بهتر در کلیه‌ی نمونه‌گیری‌ها تا هر مرحله است نیز به روزرسانی می‌شود. از این نقطه جهت اطمینان از محدود نشدن در نقطه‌ی بهینه‌ی محلی در مرحله‌ی دوم حل استفاده می‌شود.

**گام ۴.** حرکت و افراز‌بندی مجدد (یا بازگشت به عقب): چنان که پیش‌تر توضیح داده شد، اگر نقطه‌ی نزدیک بهینه‌ی تولید شده در این گام به ناحیه‌ی مکمل اختصاص داشته باشد، الگوریتم به عقب بازمی‌گردد و افراز‌بندی قبلی فضا مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما در صورتی که این نقطه به محتمل‌ترین ناحیه تعلق داشته باشد، از نقطه‌ی به دست آمده برای افراز‌بندی این ناحیه به هشت زیرناحیه‌ی جدید استفاده می‌شود، به‌گونه‌ی که این نقطه یکی از گوشه‌های افرازهای جدید می‌شود و گوشه‌های دیگر، گوشه‌های محتمل‌ترین ناحیه‌ی فعلی‌اند. کاملاً واضح است که این زیرناحیه‌ها ممکن است مساحت مساوی نداشته باشند. کل ناحیه‌ی باقی‌مانده از فضا در غیر از این هشت زیرناحیه با هم یکی شده و ناحیه‌ی مکمل را تشکیل می‌دهند. با استفاده از این ۹ ناحیه‌ی ایجاد شده به گام مربوط به نمونه‌گیری از افرازها بازمی‌گردد.

**گام ۵.** بررسی شرط توقف مرحله‌ی اول الگوریتم: الگوریتم در دو صورت متوقف می‌شود: ۱. همان‌طور که در گام ۳ توضیح داده شد، چنانچه تعداد تکرارهای غیر بهبود یافته الگوریتم کم‌تر از  $I^{max}$  باشد الگوریتم به گام نمونه‌گیری بازمی‌گردد، و در غیر این صورت متوقف می‌شود. ۲. چنانچه فضای جواب سه مرتبه از فضای جواب اصلی کوچک‌تر شود (حداقل سه بار فضای جواب افراز‌بندی شده باشد)، مرحله‌ی اول الگوریتم به پایان می‌رسد و حل از مرحله‌ی دوم ادامه می‌یابد.

دسته‌ی کالاها به صرفه باشد. در صورتی که قیمت دسته کالاها از قیمت یکی از آن‌ها کوچک‌تر باشد، خرید جداگانه‌ی محصولات به صرفه نیست و همه‌ی مشتریان دسته کالاها را برای خرید انتخاب می‌کنند، چرا که به این ترتیب با هزینه‌ی کم‌تر تعداد بیشتری کالا خریداری کرده‌اند. بنابراین قیمت دسته کالاها باید از قیمت هر کدام از کالاها به صورت جداگانه بیشتر باشد. رابطه‌ی ۳ این نکته را در بر دارد. رابطه‌ی ۴ محدودیت فضای انبار است. این محدودیت تضمین می‌کند که بیشتر از فضای انبار سفارش داده نشود. رابطه‌ی ۵ نشان می‌دهد که قیمت هر کالا باید در مجموعی مجاز قیمت آن کالا تعیین شود. رابطه‌ی ۶ تضمین می‌کند که میزان سفارش کالا در بازه مجاز آن قرار بگیرد. مقدار  $\text{Max } D_i$  در تابع هدف از رابطه‌ی ۷ محاسبه می‌شود:

$$\text{Max } D_i = \alpha_i + \sum_{\forall \beta_{ij} \geq 0} \beta_{ij} \cdot \max p_j + \sum_{\forall \beta_{ij} \leq 0} \beta_{ij} \cdot \min p_j + b_i \quad (7)$$

## ۴. الگوریتم حل

برای حل مدل فوق الگوریتم دومرحله‌ی توسعه داده شده است. در مرحله‌ی اول ابتدا با روش بهبود یافته‌ی افراز آشیانه‌ی به فضای کوچک‌تری از جواب‌های بهینه دست می‌یابیم. در مرحله‌ی دوم بهترین جواب حاصله در مرحله‌ی اول را در چند جهت توسعه می‌دهیم که سبب دست‌یابی سریع‌تر و مطمئن‌تر به جواب بهینه می‌شود. در این الگوریتم متغیر  $q$  ثابت و به‌عنوان ورودی وارد مدل می‌شود که موجب ساده‌تر شدن حل مسئله می‌شود. در انتهای مرحله‌ی اول مناطقی از فضای جواب متغیر  $q$  که از جواب بهینه فاصله دارد خود به خود حذف می‌شود.

### ۴.۱. گام‌های الگوریتم

**گام ۱.** افراز‌بندی اولیه‌ی فضا براساس متغیرهای  $q$ : روش‌های متفاوتی برای افراز‌بندی فضا در الگوریتم افراز آشیانه‌ی استفاده شده است. در این الگوریتم، به‌منظور افراز‌بندی اولیه‌ی فضا، محدوده‌ی هر متغیر  $q$  (با توجه به محدودیت‌های مربوط به تعیین حدود  $L$  و  $U$ ) به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود. مزیت این روش تقسیم‌بندی علاوه بر ساده بودن، امکان تعمیم آن به فضاهای با ابعاد بالاتر است. فضای جواب هر متغیر به دو بازه تقسیم می‌شود:

$$\left[ L, \frac{U-L}{2} \right], \left[ \frac{U-L}{2}, U \right]$$

با تقسیم‌بندی فضای جواب برای سه کالا، بر این اساس هشت افراز به وجود می‌آید. در گام ۱ این هشت مکعب حاصل از افراز‌بندی اولیه هم‌اندازه‌اند و در اولین افراز‌بندی ۸ افراز داشته و منطقی‌ی مکمل وجود ندارد. از ۸ ناحیه‌ی حاصل شده نمونه گرفته می‌شود.

**گام ۲.** نمونه‌گیری: پس از تعیین حدود افرازهای اولیه،  $N$  نمونه‌ی تصادفی یکنواخت از هر یک از افرازها گرفته می‌شود.

**گام ۳.** محاسبه‌ی شاخص محتمل بودن و تعیین افراز برنده: نمونه‌های گرفته شده در گام قبل به‌منظور تخمین شاخص محتمل بودن برای هر افراز و تعیین افراز برنده (محتمل‌ترین افراز تکرار بعدی) استفاده می‌شود. هر نمونه‌ی تصادفی شامل برداری از مقادیر  $q$  است ( $q = [q_1, q_2, q_3]$ ). این مقادیر به‌عنوان ورودی وارد مدل شده

## ۵. نتایج محاسباتی

### ۱.۵. تعریف مسائل نمونه

با توجه به این که مسئله‌ی تعریف شده با فرض همبستگی تقاضای کالاها به قیمت خود کالا و سایر کالاها در ادبیات چندین کار نشده است برای تعریف مسائل نمونه پارامترها را به صورت زیر تعریف شده‌اند: برای تعریف پارامترهایی که با مقاله‌ی موری (۲۰۱۲) مشترک‌اند از روش ایشان استفاده شده است، زیرا فرضیات این مقاله در بین ادبیات موجود بیشترین شباهت را با این تحقیق دارد.

$c_i$ : قیمت تأمین یک واحد کالای  $i$ ؛

$\alpha_i$ : بین ۱/۵ تا ۴ برابر کمینه قسمت وابسته به قیمت تقاضا؛

$L_i$ : بین ۲۵٪ تا ۷۵٪ تقاضای مورد انتظار چنانچه قیمت همه کالاها برابر با میانگین قیمت هر کدام باشد؛

$U_i$ : بین ۷۵٪ تا ۲۰۰٪ تقاضای مورد انتظار؛

$$R: \left[ \sum_i l_i r_i, \sum_i u_i r_i \right];$$

$b_i$ : بین ۱۰٪ تا ۳۰٪ تقاضای مورد انتظار؛

$a_i: b_i$ ؛

$h_i$ : بین ۵٪ تا ۱۵٪ هزینه خرید؛

$\pi_i$ : بین ۲۰٪ تا ۳۰٪ هزینه خرید؛

$P_i: [c_i, 1.2c_i]$ ؛

$\beta_{ij}: [0.1, 2]$ ؛

$\beta_{zz}: [1, 4]$ .

از آنجا که امکان حل مدل مسئله به دلیل پیچیدگی زیاد به صورت قطعی وجود ندارد، برای نشان دادن کارایی مدل، جواب بهینه‌ی مسائل با سایز کوچک را از روش شمارش کامل به دست آورده و این جواب‌ها با جواب حاصل از الگوریتم مقایسه می‌شود. در جدول ۱ برای سه سری از اندازه‌های مختلف مسئله ۱۰ مسئله به صورت تصادفی تعریف شده که در آن هزینه‌ی تأمین کالاها به صورت تصادفی بین ۱۵ تا ۲۰ تغییر می‌کند.

همان‌طور که در جدول ۱ نشان داده شده است، خطای الگوریتم  $q$  ثابت تا بزرگ‌ترین سایز مسئله (که جواب بهینه‌ی آن از طریق روش شمارش کامل به دست آمده) صفر است.

### ۲.۵. نتایج محاسباتی مسئله با سایز بزرگ

با افزایش سایز مسئله، تعداد حالات ممکن به صورت نمایی افزایش می‌یابد. جهت نمایش کارایی الگوریتم پیشنهادی در این موارد، یک مسئله‌ی نمونه با سایز بزرگ‌تر ایجاد شده و زمان حل و تعداد حالت‌های بررسی شده توسط الگوریتم برای تعیین جواب نهایی در جدول ۲ نمایش داده شده است. همچنین این نتایج با نتایج حاصل از حل مسائل سایز بزرگ<sup>[۲۱]</sup> که در بین ادبیات موجود بیشترین شباهت را به این پژوهش دارد، مقایسه شده است.

از آنجا که در مرحله‌ی اول الگوریتم، جواب اولیه و محدوده‌ی جواب با روش افراز‌بندی و با دقت بالایی تعیین می‌شود، تعداد جواب‌های لازم برای بررسی قبل از دست‌یابی به جواب بهینه به صورت قابل توجهی نسبت به روش‌های موجود کاهش می‌یابد. به این ترتیب زمان حل کاهش یافته، الگوریتم در زمان کوتاه‌تری به جواب بهتر دست می‌یابد. برای مثال در الگوریتم ارائه شده توسط موری (۲۰۱۲) در مسائل سایز بزرگ‌تر، به دلیل زیاد شدن تعداد حالات، بهترین جواب در ۳۰ دقیقه‌ی

گام ۶. (مرحله‌ی دوم):  $x^{opt}$  نهایی به دست آمده از مرحله‌ی قبل، برداری از مقادیر سفارش هر کدام از کالاهاست.  $x^{opt} = [q_1^i, q_2^i, q_3^i]$  ورودی این مرحله از حل است. در این مرحله جواب اولیه در چند جهت توسعه داده می‌شود. ابتدا تغییر حاصل در تابع هدف با تغییر هر کدام از مقادیر  $q$  به صورت جداگانه بررسی می‌شود. در هر جهت تغییر مقدار یک  $q$  با ثابت ماندن سایر  $q$ ها بررسی می‌شود. متغیر  $q$  به صورت تصادفی یک واحد افزایش یا یک واحد کاهش می‌یابد.

$$q^i = \begin{cases} q_i^i + 1 \\ q_i^i - 1 \end{cases} \quad \text{for } i = 1, 2, 3$$

گام ۷. در این مرحله تابع هدف مسئله به ازای سه جهت جدید تولید شده در گام قبل محاسبه می‌شود. در صورتی که تابع هدف افزایش یافته باشد، جهتی که بیشترین افزایش را داشته جایگزین  $x^{opt}$  در گام ۶ می‌شود و حل مسئله از گام ۶ ادامه پیدا می‌کند. اما چنانچه به ازای هیچ‌کدام از سه جهت تولید شده تابع هدف افزایش نیابد، سه جهت جدید تولید می‌شود. از آنجا که در گام قبل مقادیر سفارش به صورت تصادفی یک واحد کم‌تر یا بیشتر شده‌اند، در این گام برخلاف جهت گام ۶ تغییر می‌کنند.

در این حالت هم مشابه حالت قبل، تابع هدف مسئله به ازای سه جهت جدید تولید شده محاسبه می‌شود. در صورتی که تابع هدف افزایش یافته باشد، جهتی که بیشترین افزایش را داشته جایگزین  $x^{opt}$  در گام ۶ می‌شود و حل مسئله از گام ۶ ادامه پیدا می‌کند. اما در صورتی که به ازای هیچ‌کدام از سه جهت تولید شده باز هم تابع هدف افزایش نیابد، الگوریتم به گام ۸ می‌رود.

گام ۸. این بار دو مقدار  $q$  به صورت هم‌زمان تغییر داده می‌شود؛ مقادیر سفارش دو کالا به صورت هم‌زمان تغییر می‌کند، سفارش هر کدام از کالاها به صورت تصادفی افزایش یا کاهش می‌یابد. به این ترتیب چهار حالت مختلف تغییر هر کدام با احتمال ۲۵٪ وجود دارد:

$$q^i, q^j = \begin{cases} q_i^i + 1, q_j^j + 1 \\ q_i^i - 1, q_j^j + 1 \\ q_i^i + 1, q_j^j - 1 \\ q_i^i - 1, q_j^j - 1 \end{cases}$$

بنابراین هر گروه دوتایی از کالاها  $(q^1, q^2)$  و  $(q^1, q^3)$  و  $(q^2, q^3)$  به صورت هم‌زمان تغییر می‌کند. در این حالت هم مشابه حالت قبل، تابع هدف مسئله به ازای سه جهت جدید تولید شده محاسبه می‌شود. اگر تابع هدف افزایش یافته باشد، جهتی که بیشترین افزایش را دارد جایگزین  $x^{opt}$  در گام ۶ می‌شود و حل مسئله از گام ۶ ادامه پیدا می‌کند. اما اگر به ازای هیچ‌کدام از سه جهت تولید شده تابع هدف افزایش نیابد، سه جهت جدید تولید می‌شود به طوری که در هر گروه از کالاها، کالای اول خلاف جهت قسمت قبل تغییر می‌کند. با سه جهت جدید هم فرایند قبل تکرار می‌شود، سه جهت جدید با تغییر سفارش کالای دوم برخلاف حالت اولیه تولید شده همان فرایند تکرار می‌شود، در نهایت سه جهت نهایی با تغییر هر دو مقدار سفارش برخلاف حالت اولیه تولید می‌شود. اگر در هیچ‌کدام از حالت‌ها تابع هدف افزایش نیافته باشد الگوریتم به گام ۹ می‌رود.

گام ۹. برای نقطه‌ی  $x^{opt(z)}$  گام‌های ۶، ۷ و ۸ تکرار می‌شود و نتیجه‌ی حاصل با نتیجه‌ی به دست آمده از توسعه‌ی  $x^{opt}$  مقایسه می‌شود؛ بهترین جواب به عنوان بهترین جواب پیدا شده معرفی می‌شود و حل الگوریتم به پایان می‌رسد.

جدول ۱. نتایج محاسباتی.

اندازه مسئله	شماره مسئله	مقدار بهینه سود از روش شمارش کامل (\$)	جواب الگوریتم (\$)	خطای الگوریتم (%)
$n = 3$ $ p  = 15$ $ q  = 5$	۱	۶۹۷,۰	۶۹۷,۰	۰
	۲	۵۰۷,۸	۵۰۷,۸	۰
	۳	۸۲۹,۶	۸۲۹,۶	۰
	۴	۶۶۹,۸	۶۶۹,۸	۰
	۵	۷۰۸,۷	۷۰۸,۷	۰
	۶	۸۶۵,۰	۸۶۵,۰	۰
	۷	۹۶۴,۵	۹۶۴,۵	۰
	۸	۹۴۸,۶	۹۴۸,۶	۰
	۹	۹۵۱,۰	۹۵۱,۰	۰
	۱۰	۷۱۳,۵	۷۱۳,۵	۰
$n = 3$ $ p  = 15$ $ q  = 20$	۱	۱۵۳۶,۷	۱۵۳۶,۷	۰
	۲	۱۶۶۹,۰	۱۶۶۹,۰	۰
	۳	۷۵۳,۵	۷۵۳,۵	۰
	۴	۱۶۸۹,۱	۱۶۸۹,۱	۰
	۵	۲۰۷۹,۳	۲۰۷۹,۳	۰
	۶	۲۲۴۶,۲	۲۲۴۶,۲	۰
	۷	۲۱۹۳,۱	۲۱۹۳,۱	۰
	۸	۲۰۷۶,۴	۲۰۷۶,۴	۰
	۹	۲۴۲۸,۷	۲۴۲۸,۷	۰
	۱۰	۱۶۳۵,۰	۱۶۳۵,۰	۰
$n = 3$ $ p  = 15$ $ q  = 40$	۱	۱۹۷۰,۵	۱۹۷۰,۵	۰
	۲	۱۸۲۴,۸	۱۸۲۴,۸	۰
	۳	۲۵۹۰,۸	۲۵۹۰,۸	۰
	۴	۲۱۱۲,۹	۲۱۱۲,۹	۰
	۵	۲۴۰۶,۸	۲۴۰۶,۸	۰
	۶	۲۶۱۵,۰	۲۶۱۵,۰	۰
	۷	۲۳۹۳,۳	۲۳۹۳,۳	۰
	۸	۲۳۴۹,۹	۲۳۴۹,۹	۰
	۹	۲۴۹۶,۰	۲۴۹۶,۰	۰
	۱۰	۲۰۱۹,۱	۲۰۱۹,۱	۰

جدول ۲. بررسی عملکرد الگوریتم در حل مسئله‌ی نمونه با سایز بزرگ.

اندازه مسئله	تعداد حالات ممکن	تعداد حالات بررسی شده توسط مدل	زمان حل هر حالت (S)
$n = 3$ $ p  = 10000$ $ q  = 10000$	۱۰ <sup>۲۴</sup>	۱۶۳۰	۱,۲

اول حل ارائه شده است. با وجود آن که زمان لازم برای تعیین جواب هر راه حل در الگوریتم کم‌تر از الگوریتم ارائه شده در این مطالعه است، در عمل امکان حل کامل مسائل با سایز بزرگ‌تر وجود ندارد. بنابراین، در الگوریتم ارائه شده کل زمان حل از طریق کاهش تعداد حالات مورد بررسی کاهش یافته است.

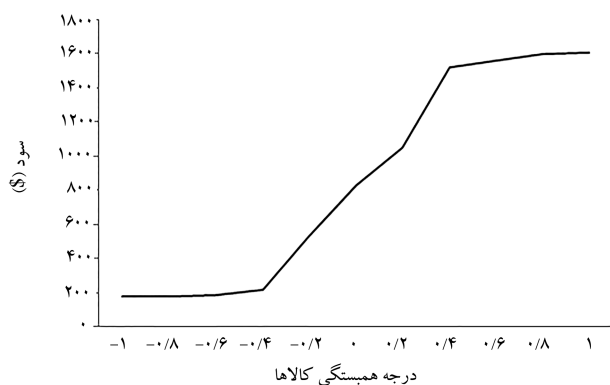
### ۳.۵. نتایج مدیریتی

در این قسمت نتایج حاصل از تغییر پارامترهای مختلف و تأثیر آن بر استراتژی دسته‌بندی بررسی، و نتایج آن در ادامه شرح داده می‌شود.

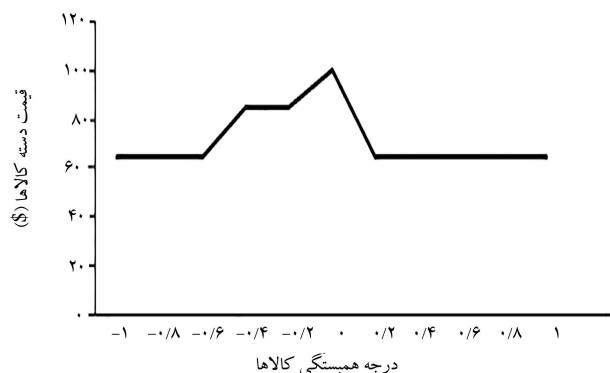
در شکل ۱ اعداد محور افقی نسبت  $\beta_{ij}/\beta_{ij}$  است که اگر دو کالا کاملاً مکمل باشند این عدد برابر ۱ و اگر کاملاً جایگزین باشد این عدد برابر ۱- است. چنان که مشاهده می‌شود، با افزایش درجه‌ی همبستگی کالاها به سمت کالاهای مکمل، سود حاصل از استراتژی دسته‌بندی کالاها افزایش می‌یابد، اما با افزایش درجه‌ی همبستگی کالاها جایگزین، سود کاهش می‌یابد.

با افزایش درجه‌ی همبستگی کالاها مکمل و جایگزین، قیمت دسته کالاها کاهش می‌یابد. بیشترین قیمت دسته کالاها زمانی است که کالاها کاملاً از هم مستقل باشند (درجه‌ی همبستگی آن‌ها صفر باشد). چنان که در شکل ۲ مشاهده می‌شود با افزایش درجه‌ی همبستگی کالاها به سمت کالاهای مکمل و جایگزین، قیمت دسته کالاها کاهش می‌یابد اما از یک درجه‌ی همبستگی مشخص به بعد، قیمت کالاها تغییر چندانی نمی‌کند.

چنان که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، با افزایش میزان حساسیت مشتریان به تخفیف، سود حاصل از کاربرد استراتژی دسته‌بندی افزایش می‌یابد. محور افقی



شکل ۱. ارتباط بین درجه همبستگی کالاها و سود.



شکل ۲. ارتباط بین درجه‌ی همبستگی کالاها و قیمت دسته کالاها ( $p$ ).



شکل ۵. ارتباط سود و اندازه بازار به‌طور کلی.

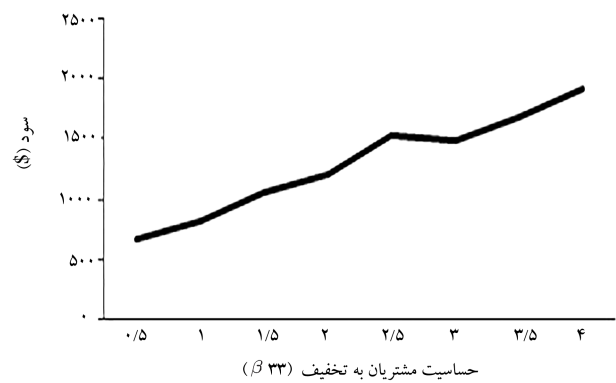
افزایش می‌یابد پس از آن سود کاهش می‌یابد. چرا که جریمه‌ی حاصل از اختلاف بین تقاضا و میزان سفارش بیشتر از سود حاصل از فروش بیشتر می‌شود.

## ۶. نتیجه‌گیری

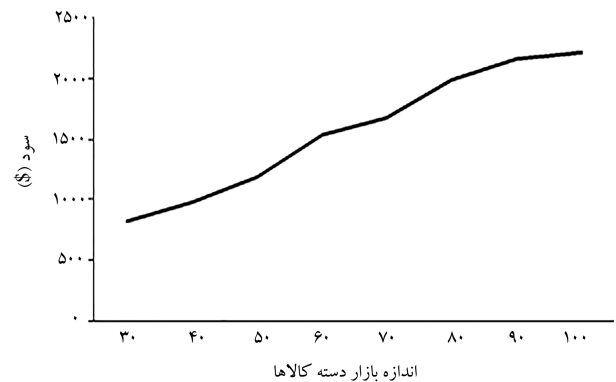
با این که مسئله‌ی روزنامه‌فروش از ادبیات غنی برخوردار است، اما در نظر گرفتن هم‌زمان آن با مسئله‌ی قیمت‌گذاری در اکثر مطالعات محدود به یک کالا می‌شود. همچنین فرض کشش متقابل تقاضا باعث می‌شود که مسئله به شرایط واقعی نزدیک‌تر شود، اما، از آنجا که این فرض بر پیچیدگی مسئله می‌افزاید در ادبیات موجود چندان به آن پرداخته نشده است. با توجه به بررسی‌های صورت گرفته تنها در این پژوهش موارد زیر به‌صورت هم‌زمان در نظر گرفته شده است: چندمحصولی، کشش متقابل تقاضا، متغیرهای قیمت و میزان سفارش، و استراتژی فروش دسته‌یی کالاها.

نتایج الگوریتم توسعه داده شده بسیار امیدوارکننده است. این الگوریتم به‌ارزای تمام مسائل حل شده با سایز کوچک جواب بهینه را ارائه می‌دهد. نتایج مدیریتی حاصل از بررسی‌های صورت گرفته نشان‌گر آن است که استفاده از استراتژی دسته‌بندی در مورد کالاها، مکمل، اندازه بازار بزرگ‌تر، و حساسیت بیشتر مشتریان به تخفیف بسیار سودآور بوده و توصیه می‌شود.

برای توسعه‌ی این تحقیق در آینده می‌توان مسئله را با در نظر گرفتن محیط رقابتی و تأثیر قیمت کالاها، رقیب در میزان تقاضای هر کالا مدل‌سازی و حل کرد. همچنین می‌توان مسئله را به حالت چنددوره‌یی توسعه داد و راه حل مناسب آن را نیز ارائه کرد.



شکل ۳. ارتباط حساسیت مشتریان به تخفیف و سود.



شکل ۴. ارتباط سود و اندازه بازار دسته کالاها.

نشان‌دهنده  $\beta_{33}$  است؛ یعنی هرچه مشتریان به قیمت دسته کالاها حساس‌تر باشند سود حاصل از استراتژی دسته‌بندی افزایش می‌یابد. در این مثال مشخص حساسیت مشتریان به تخفیف از ۰٫۵ تا ۴ افزایش یافته است، که نتیجه‌ی آن افزایش سود حاصل، از ۷۰۰ تا نزدیک ۱۸۰۰ است.

چنان که در شکل ۴ نمایش داده شده، با افزایش اندازه بازار دسته کالاها، سود حاصل از کاربرد استراتژی دسته‌بندی ترکیبی افزایش می‌یابد. با تغییر اندازه بازار بین ۳۰ تا ۱۰۰ سود از ۸۰۰ تا ۲۲۰۰ تغییر کرده است. چنان که مشاهده می‌شود سود با اندازه بازار نسبت مستقیم دارد. افزایش اندازه بازار در بازارهای کوچک‌تر تأثیر بیشتری بر سود دارد و سود با شیب بیشتری افزایش می‌یابد. چنان که در شکل ۵ نشان داده شده، با افزایش اندازه کل بازار، تا یک نقطه سود

## منابع (References)

1. Stigler, G.J. "United States vs. Loew's Inc, a note on block booking", *Supreme Court Review*, pp. 152-157 (1963).
2. Adams, W.J. and Yellen, J.L. "Commodity bundling and the burden of monopoly", *Quarterly Journal of Economics*, **90**, pp. 475-498 (1976).
3. Schmalensee, R. "Gaussian demand and commodity bundling", *Journal of Business*, **57**(1), pp. 211-230 (1984).
4. Long, J.B. "Comments on Gaussian demand and commodity bundling", *Journal of Business*, **57**(1), pp. 235-246 (1984).
5. Salinger, M.A. "A graphical analysis of bundling", *Journal of Business*, **68**(1), pp. 85-98 (1995).

6. Economides, N. "Network externalities, complementarities and invitation to enter", *European Journal of Political Economy*, **12**, pp. 211-233 (1996).
7. Ernst, R. and Kouvelis, P. "The effect of selling packaged goods on inventory decisions", *Management Science*, **45**(8), pp. 1142-1155 (1999).
8. Bulut, Z., Gurler, U. and Sen, A. "Bundle pricing of inventories with stochastic demand", *European Journal of Operational Research*, **197**(3), pp. 897-911 (2009).
9. Yücel, E., Karaesmen, F., Salman, F.S. and Türkay, M. "Optimizing product assortment under customer-driven demand substitution", *European Journal of Operational Research*, **199**(3), pp. 759-768 (2009).
10. Yan, R. and Bandyopadhyay, S. "The profit benefits of bundle pricing of complementary products", *Journal of Retailing and Consumer Services*, **18**, pp. 355-361 (2011).
11. Ferreira, K.D. and Wu, D.D. "An integrated product planning model for pricing and bundle selection using Markov decision processes and data envelope analysis", *International Journal of Production Economics*, **134**(1), pp. 95-107 (2011).
12. Li, M., Feng, H., Chen, F. and Kou, J. "Numerical investigation on mixed bundling and pricing of information products", *Int. J. Production Economics*, **144**, pp. 560-571 (2013).
13. Mayer, S., Klein, R. and Seiermann, S. "A simulation-based approach to price optimization of the mixed bundling problem with capacity constraints", *International Journal of Production Economics*, **145**, pp. 584-598 (2013).
14. Bhargava, H.K. "Mixed bundling of two independently valued goods", *Management Science*, **59**, pp. 2170-2185 (2013).
15. Moon, I. and Silve, E.A. "The multi-item newsvendor problem with a budget constraint and fixed ordering costs", *J. Oper. Res.*, **51**, pp. 602-608 (2000).
16. Abdel-Malek, L. and Montanari, R. "An analysis of the multi-product newsboy problem with a budget constraint", *International Journal of Production Economics*, **97**(3), pp. 296-307 (2005).
17. Zhang, B., Xu, X. and Hua, Z. "A binary solution method for the multi-product newsboy problem with budget constraint", *Int. J. Production Economics*, **117**, pp. 136-141 (2009).
18. Zhang, B. and Hua, Z. "A portfolio approach to multi-product newsboy problem with budget constraint", *Computers & Industrial Engineering*, **58**, pp. 759-765 (2010).
19. Wei, Y. and Hu, Q. "A continues time revenue management model with multi-product", *International Conference on Service Systems and Service Management*, Chengdu, China (2007).
20. Shi, J., Zhang, G. and Sha, J. "Jointly pricing and ordering for a multi-product multi-constraint newsvendor problem with supplier quantity discounts", *Applied Mathematical Modelling*, **35**, pp. 3001-3011 (2011).
21. Murray, C.C., Gosavi, A. and Talukdar, D. "The multi-product price-setting newsvendor with resource capacity constraints", *Int. J. Production Economics*, **138**(1), pp. 148-158 (2012).
22. Zhang, L., Yao, Z. and Zhang, G. "Joint optimization of pricing and ordering for two substitute products with a budget constraint", *Service Systems and Service Management (ICSSSM), 11th International Conference on IEEE* (2014).
23. Fu, H., Dan, B. and Sun, X. "Joint optimal pricing and ordering decisions for seasonal products with weather-sensitive demand", *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 105098, 8 p. (2014).
24. Li, M., Feng, H., Chen, F. and Kou, J. "Numerical investigation on mixed bundling and pricing of information products", *Int. J. Production Economics*, **144**, pp. 560-571 (2013).
25. Maddah, B. Bish, E.K. and Tarhini, H. "Newsvendor pricing and assortment under poisson decomposition", *IIE Transactions*, **46**, pp. 567-584 (2014).